

Valeur C et DEA
Conception d'applications multimédia

Synthèse d'images
Courbes & surfaces paramétrées



Alexandre Topol

Département Informatique
Conservatoire National des Arts & Métiers

2001-2002

3. Courbes & surfaces paramétrées

- 3.1. Courbes paramétrées
- 3.2. Courbes de Bézier
- 3.3. Les Splines
- 3.4. Surfaces paramétrées
- 3.5. Surfaces de Bézier

3.1. Courbes paramétrées

- Le besoin : approximer et/ou interpoler des contours d'objets « réels »
 - Critère esthétique : continuité du premier ordre (tangentes), du 2ème ordre (points d'inflexion)
 - Flexibilité : courbes quadratique (ordre 2) insuffisantes
- ⇒ une solution : les courbes 2D polynomiales d'ordre 3, généralisées ensuite aux surfaces 3D

de Casteljau : Citroën 1959

Bézier : Renault 1962

Fergusson : Boeing 1964

Coons : MIT 1967

Catmull : Univ. Utah 1974

3.1. Courbes paramétrées

Définitions

- Courbe en 2D
 - Localisation d'un point P qui se "déplace" dans le plan avec un degré de liberté :
- Courbe en 3D
 - Localisation d'un point P qui se "déplace" dans l'espace avec un degré de liberté :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \\ f_z(u) \end{pmatrix}$$

3.1. Courbes paramétrées

Définitions

- On préfère utiliser ici une forme *explicite* pour définir la surface, plutôt qu'une forme *implicite* comme :

$$f(x,y,z) = 0$$

- On se restreint dans tout ce qui suit à des courbes définies sur des intervalles bornés
- On prendra toujours $0 \leq u \leq 1$

3.2. Courbes de Bézier

- Définition générale
 - Courbe lisse définie par $N+1$ points de contrôle P_0, P_1, \dots, P_N
 - Passe par les extrémités P_0 et P_N
 - Passe au voisinage des autres points

$$p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \\ f_z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N B_i(u)x_i \\ \sum_{i=0}^N B_i(u)y_i \\ \sum_{i=0}^N B_i(u)z_i \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{p} = f(u) = \sum_{i=0}^N B_i(u)\vec{P}_i$$

- avec $B_i(u) = \frac{N! u^i (1-u)^{N-i}}{i!(N-i)!}$ polynômes de Bernstein

3.2. Courbes de Bézier

- En pratique, on prend $N=3$ et donc 4 points de contrôle pour définir la courbe.

- La fonction f devient alors :

$$f(u) = \sum_{i=0}^3 B_i(u) \vec{P}_i = \vec{P}_0(1-u)^3 + 3\vec{P}_1u(1-u)^2 + 3\vec{P}_2u^2(1-u) + \vec{P}_3u^3$$

- Notation matricielle plus commode :

$$f(u) = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P}_0 \\ \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \end{pmatrix}$$

MB est la matrice génératrice des courbes de Bézier.

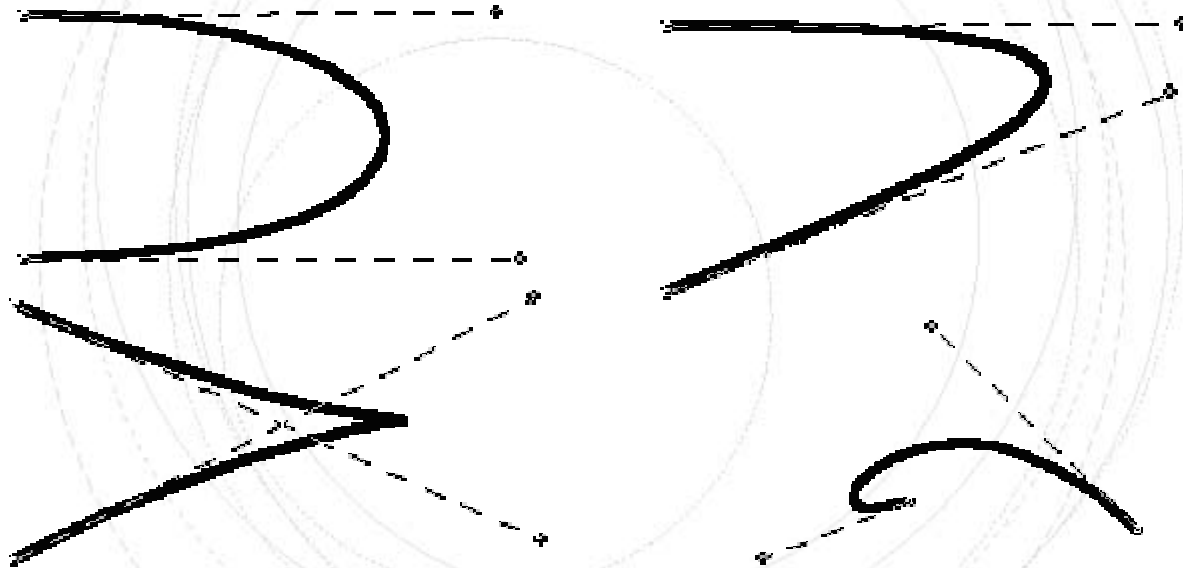
$$f(u) = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} M_B$$

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_0 \\ \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \end{pmatrix}$$

3.2. Courbes de Bézier

Exemple

- Tracé sous MacDraw Pro :

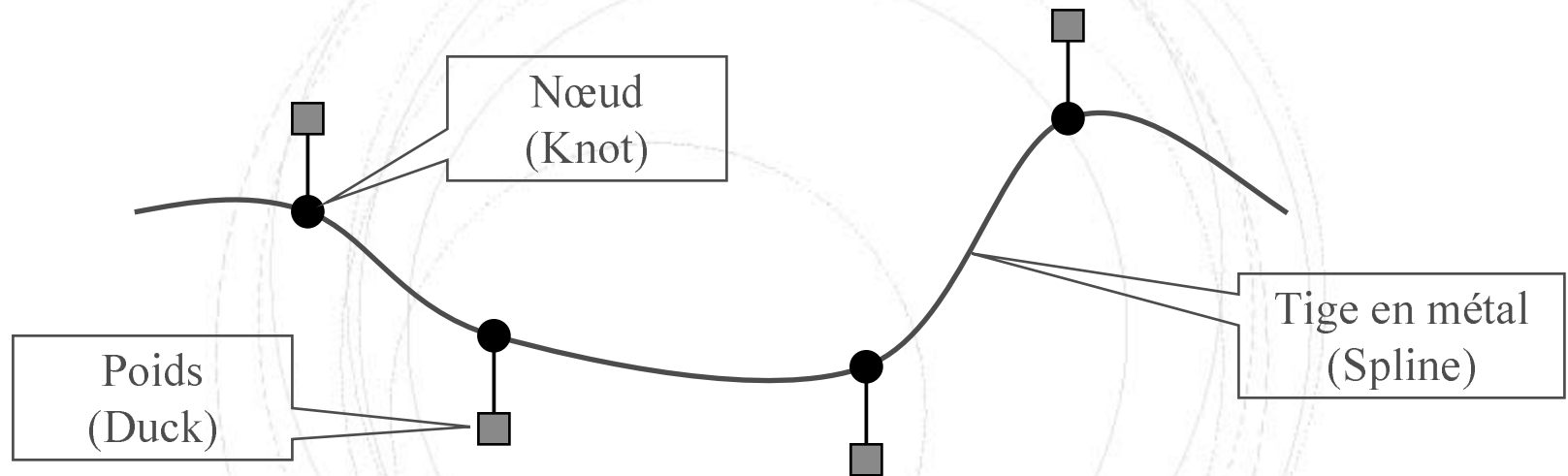


Les points de contrôle définissent l'enveloppe convexe de la courbe

3.2. Courbes de Bézier Inconvénients

- Si on a plus de 4 (16) points de contrôles, il faut générer 2 (4) courbes (surfaces)
- Les tangentes sont définies aux extrémités de la courbe de Bézier, mais pas la dérivée d'ordre 2
⇒ point d'inflexion impossible
- Si un point de contrôle change légèrement de position, l'ensemble de la courbe (surface) est affectée
- (mais faciles à dessiner...)

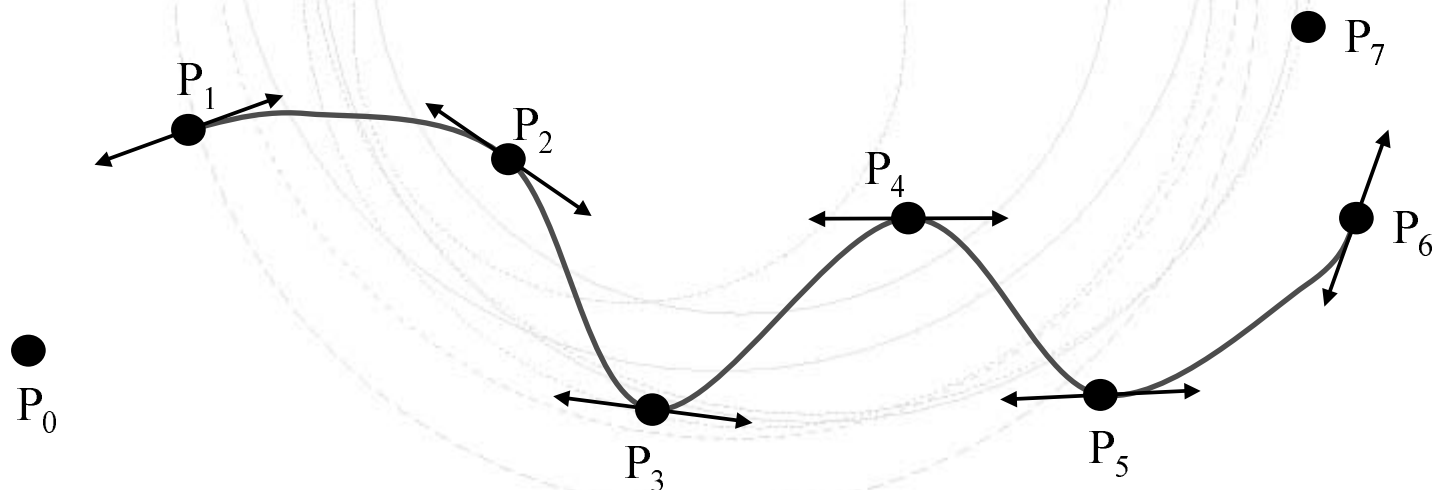
3.3. Les Splines



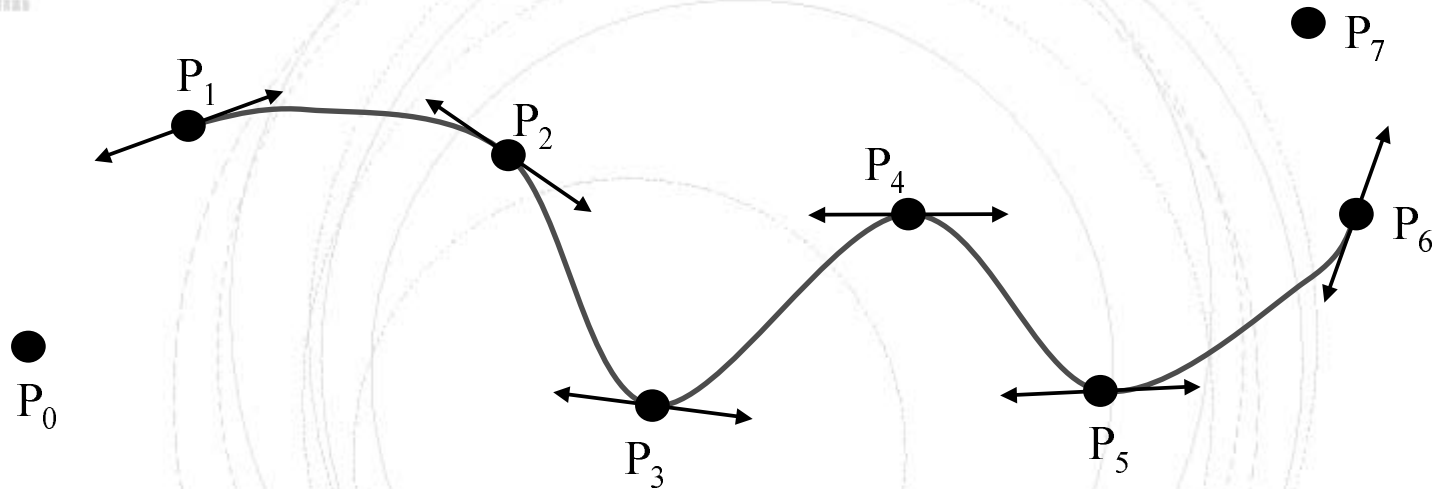
- Utilisé pour le design des avions, des voitures et des coques de bateaux
- Continuité d'ordre 2 possible aux jonctions

3.3. Les Splines Splines de Catmull-Rom

- On connaît $N+2$ points $P(0) \dots P(N+1)$
- On cherche une courbe passant par $P(1) \dots P(N)$
- La tangente au point $P(i)$ est parallèle à la droite $P(i-1), P(i+1)$



3.3. Les Splines Splines de Catmull-Rom



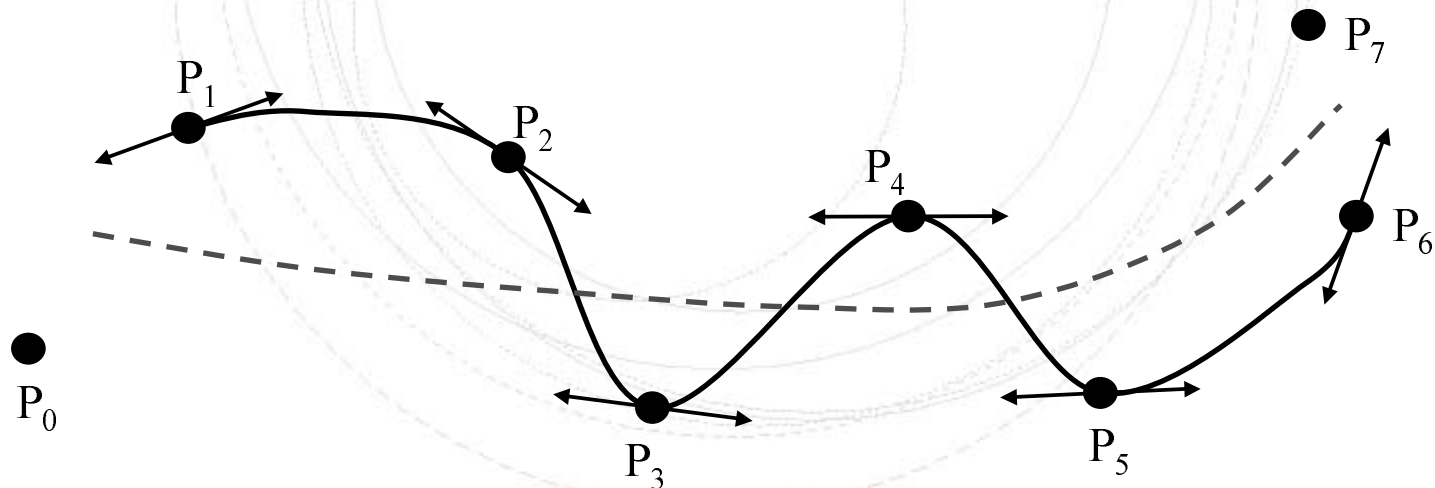
- Chaque segment S_i est défini par :

$$f_i(u) = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}_{i+1} \\ \vec{P}_{i+2} \end{pmatrix}$$

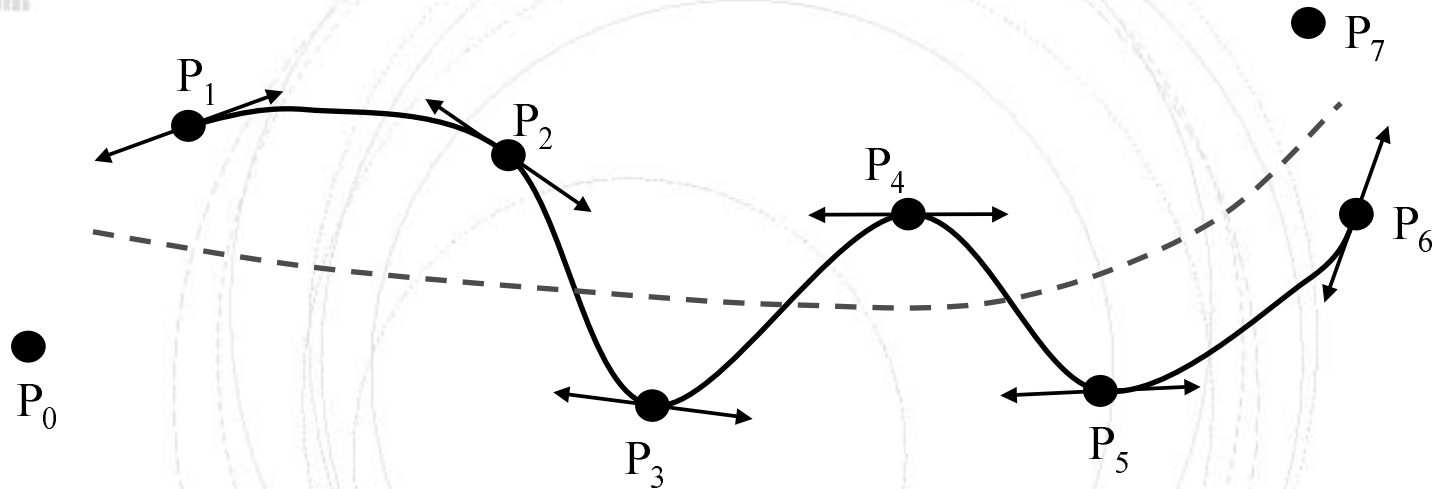
- Inconvénient : connaissance de P0 et P7 ??

3.3. Les Splines B-Splines uniformes

- On connaît N points $P(1) \dots P(N)$
- On cherche une courbe proche de $P(1) \dots P(N)$
- Continuité d'ordre 1 et 2 d'un segment à l'autre



3.3. Les Splines B-Splines uniformes



- Chaque segment S_i est défini par :

$$f_i(u) = (u^3 \ u^2 \ u \ 1) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}_{i+1} \\ \vec{P}_{i+2} \end{pmatrix}$$

- Exemple : Segment $S_3 = (P_3, P_4)$

$$f_3(0) = (P_2 + 4P_3 + P_4)/6$$

$$f_3(1) = (P_3 + 4P_4 + P_5)/6$$

3.3. Les Splines

Autres Splines

- B-splines non uniformes
 - Généralisation
 - Les nœuds ne sont pas forcément répartis régulièrement
 - Équation récursive de la forme :

$$P = f(u) = \sum_{i=0}^N \vec{P}_i N_{K,i}(u)$$

$$N_{K,i}(u) = \frac{u - x_i}{x_{i+K} - x_i} N_{K-1,i}(u) + \frac{x_{i+K} - u}{x_{i+K} - x_{i+1}} N_{K-1,i+1}(u)$$

$$N_{1,i}(u) = \begin{cases} \text{si } x_i \leq u \leq x_{i+1} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

3.3. Les Splines

Autres Splines

- B-spline non uniforme rationnelle (NURBS)

– Équation de la forme :

$$p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \\ f_z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_{x0} + b_{x1}u + b_{x2}u^2 + b_{x3}u^3}{c_0 + c_1u + c_2u^2 + c_3u^3} \\ \frac{b_{y0} + b_{y1}u + b_{y2}u^2 + b_{y3}u^3}{c_0 + c_1u + c_2u^2 + c_3u^3} \\ \frac{b_{z0} + b_{z1}u + b_{z2}u^2 + b_{z3}u^3}{c_0 + c_1u + c_2u^2 + c_3u^3} \end{pmatrix}$$

- Englobe les coniques et les autres splines
- Permet un contrôle encore plus fin de la courbe

3.4. Surfaces paramétrées

Définitions

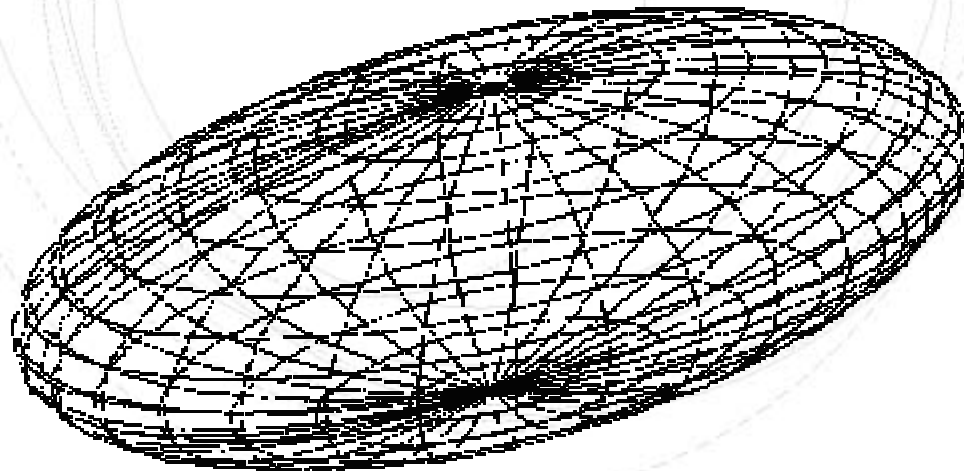
- Localisation d'un point P se "déplaçant" dans l'espace avec 2 degrés de liberté :
$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(u, v) \\ f_y(u, v) \\ f_z(u, v) \end{pmatrix}$$
- On préfère utiliser ici une forme *explicite* pour définir la surface, plutôt qu'une forme *implicite* comme :
$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$
- On se restreint dans tout ce qui suit à des surfaces bornées par 4 courbes arbitraires
- On prendra toujours $0 \leq u \leq 1$ et $0 \leq v \leq 1$

3.4. Surfaces paramétrées

Surfaces quadratiques

- Ellipsoïde

$$p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos u \cos v \\ B \cos u \sin v \\ C \sin u \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} u \in [-\pi/2, \pi/2] \\ v \in [-\pi, \pi] \end{array}$$

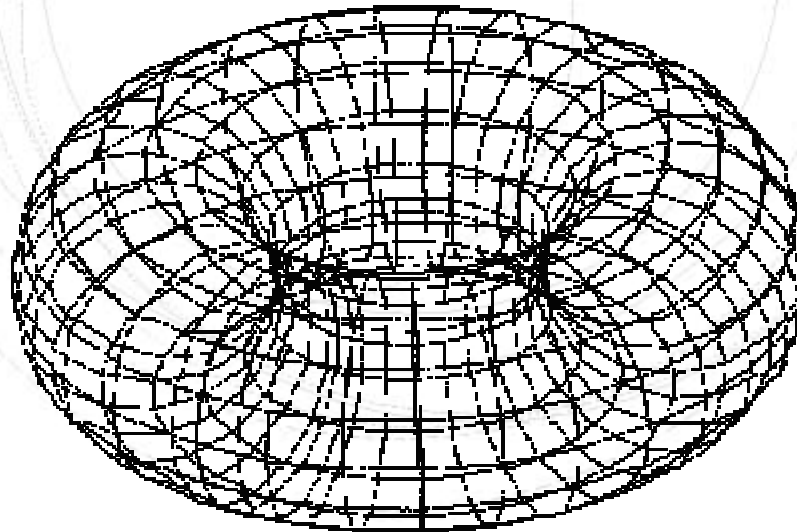


3.4. Surfaces paramétrées

Surfaces quadratiques

- Tore

$$p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + B \cos u) \cos v \\ (A + B \cos u) \sin v \\ B \sin v \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} u \in [-\pi, \pi] \\ v \in [-\pi, \pi] \end{array}$$



3.5. Surfaces de Bézier

- Généralisation à deux degrés de libertés :

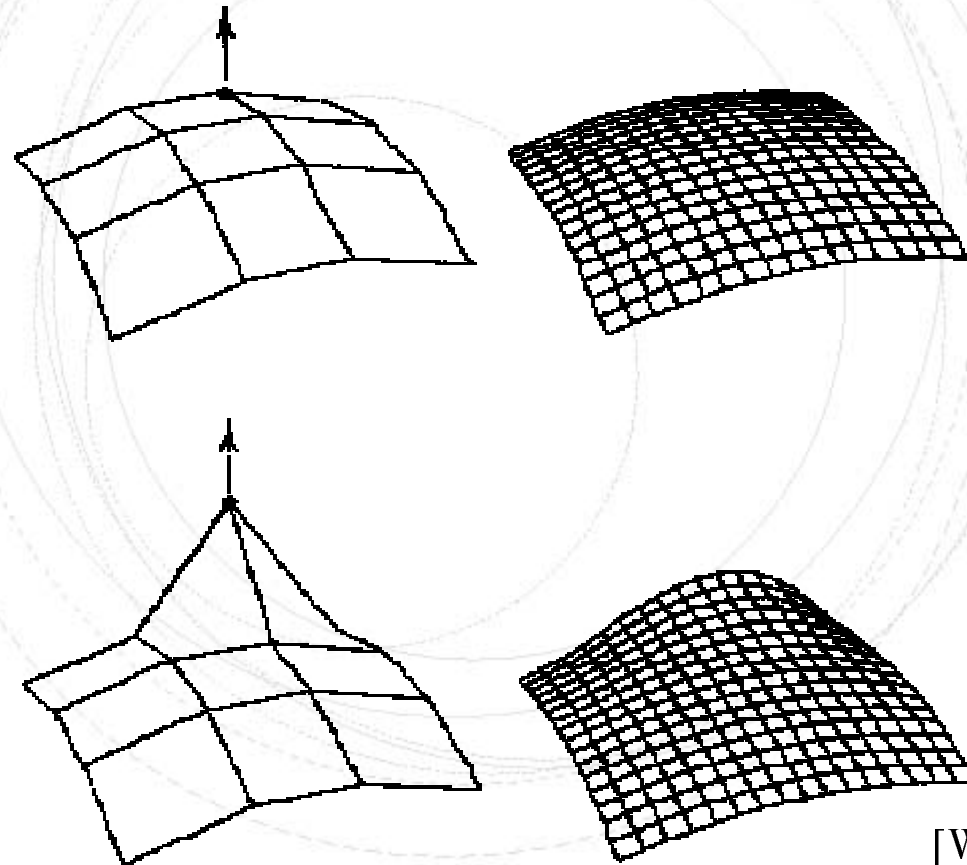
$$\vec{p} = f(u, v) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N B_i(u) B_j(v) \vec{P}_{ij}$$

- Si $N=3$, il y a maintenant 4×4 points ($P_{00} \dots P_{33}$) de contrôle pour définir la surface

$$f(u, v) = (u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1) M_B \begin{pmatrix} \vec{P}_{00} & \dots & \vec{P}_{03} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \vec{P}_{30} & \dots & \vec{P}_{33} \end{pmatrix} M_B^T \begin{pmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.5. Surfaces de Bézier

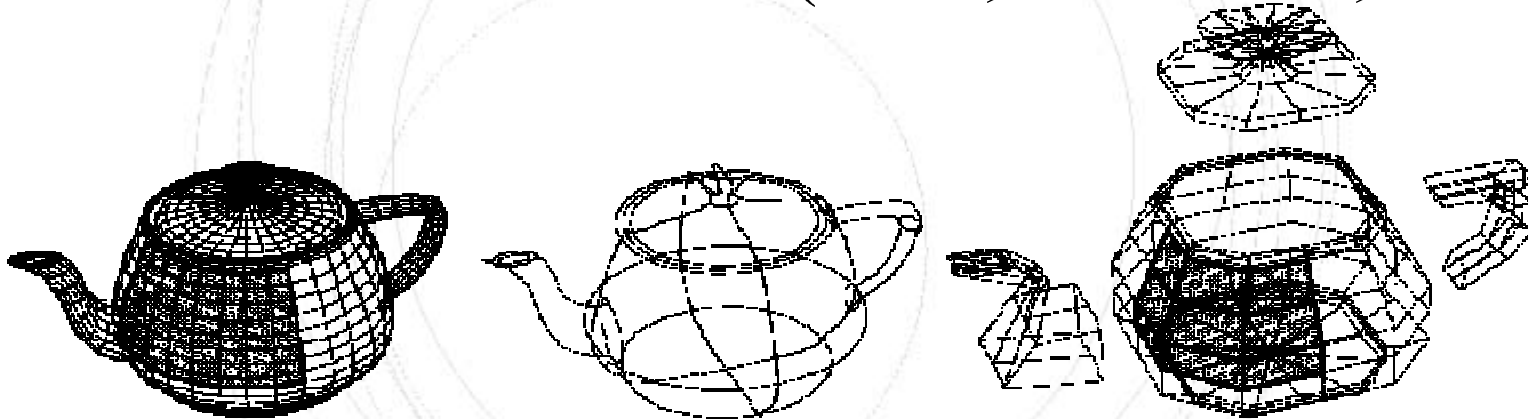
- Allure :



3.5. Surfaces de Bézier

Assemblage de surfaces de Bézier

- Un exemple fondateur : le "Utah teapot", constitué de 32 surfaces de Bézier (Blinn, Univ. Utah, 1978)



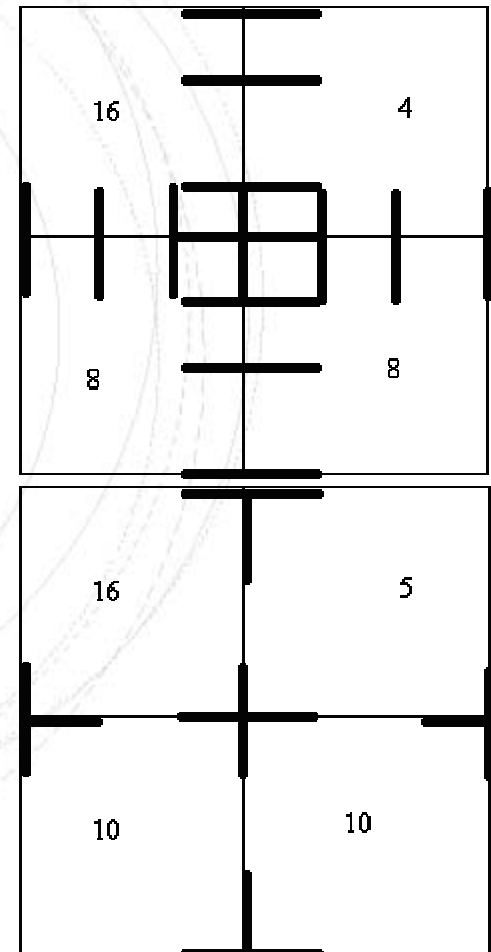
[WATT, A&M] p. 72

Avantage de l'approche : il suffit de $32 * 16 = 512$ points de contrôles pour définir la surface (au lieu d'au moins 2048 polygones)

3.5. Surfaces de Bézier

Contraintes de continuité

- Pour les courbes : points de contrôles colinéaires aux intersections
- Pour les surfaces : points de contrôles coplanaires aux intersections
- Une technique moins contraignante :



3.5. Surfaces de Bézier

Facettage des surfaces de Bézier

- Il est souvent nécessaire pour le rendu de passer à une représentation polygonale (Cf sphère chap. 1)
- Un algorithme naïf :

```

i:=1; u:=0
répéter
  j:=1; v:=0
  répéter
    P[i,j]:=Bezier(u,v)
    j:=j+1
    v:=v+1/MAX
  jusqu'à v=1
  i:=i+1
  u:=u+1/MAX
jusqu'à u=1
pour i:= 1 à MAX
  pour j:=1 à MAX
    polygone(P[i,j],P[i+1,j],
             P[i+1,j+1],P[i,j+1])
  fin pour
fin pour

```

$$\text{bezier}(u,v) = (u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1) M_B \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{P}_{00} & \dots & \vec{P}_{03} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{P}_{30} & \dots & \vec{P}_{33} \end{pmatrix}}_{\text{constant}} M_B^T \begin{pmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

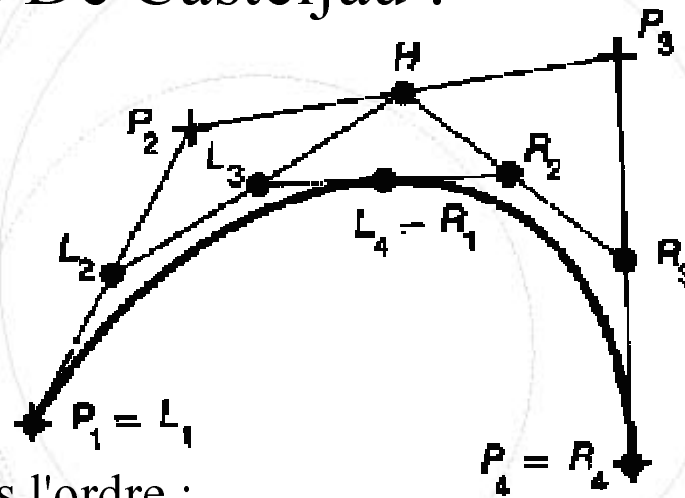
Complexité : $\text{MAX} * \text{MAX} * 3 * (4 \text{ exp} + 5 * (4 \text{ add} + 4 \text{ mult}))$

Pour $\text{MAX}=16$ (figures précédentes) :
 3072 exponentiations + 15360 additions +
 15360 multiplications

3.5. Surfaces de Bézier

Facettage des surfaces de Bézier

- Méthode de De Casteljau :



[FOLEY] p. 508

On calcule dans l'ordre :

- | | | | |
|-----|------------------|-----|------------------|
| (1) | $L1 = P1$ | (5) | $R3 = (P3+P4)/2$ |
| (2) | $L2 = (P1+P2)/2$ | (6) | $R2 = (H+R3)/2$ |
| (3) | $H = (P2+P3)/2$ | (7) | $R1 = (L3+R2)/2$ |
| (4) | $L3 = (L2+H)/2$ | (8) | $L4 = R1$ |

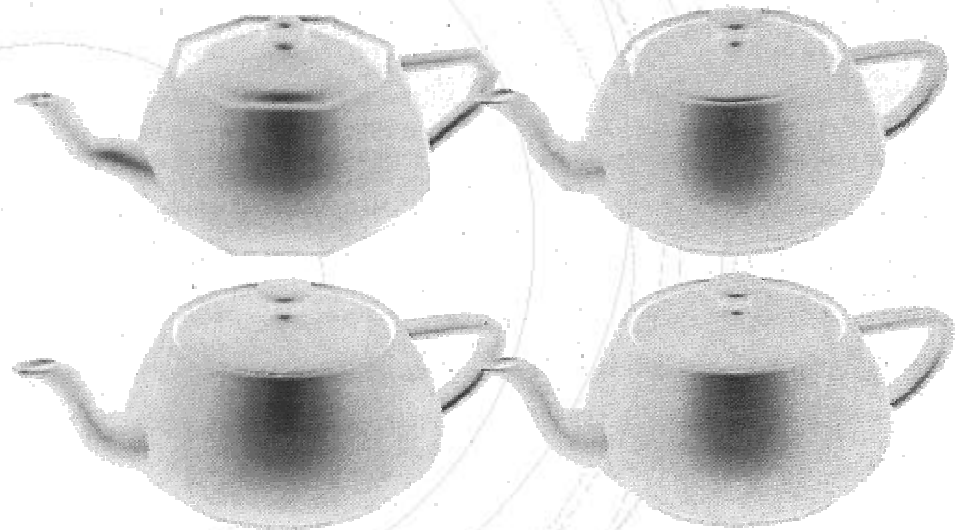
⇒ Pas de multiplication, juste divisions par 2

3.5. Surfaces de Bézier

Facettage des surfaces de Bézier

- Exemple de subdivisions successives :

Nb sous surfaces	Nb polygones
4	128
16	512
64	2048
128	8196



- On peut également faire une subdivision adaptative en fonction de la "planarité" plus ou moins grande de chaque sous-surface

[WATT, A&M] p. 83